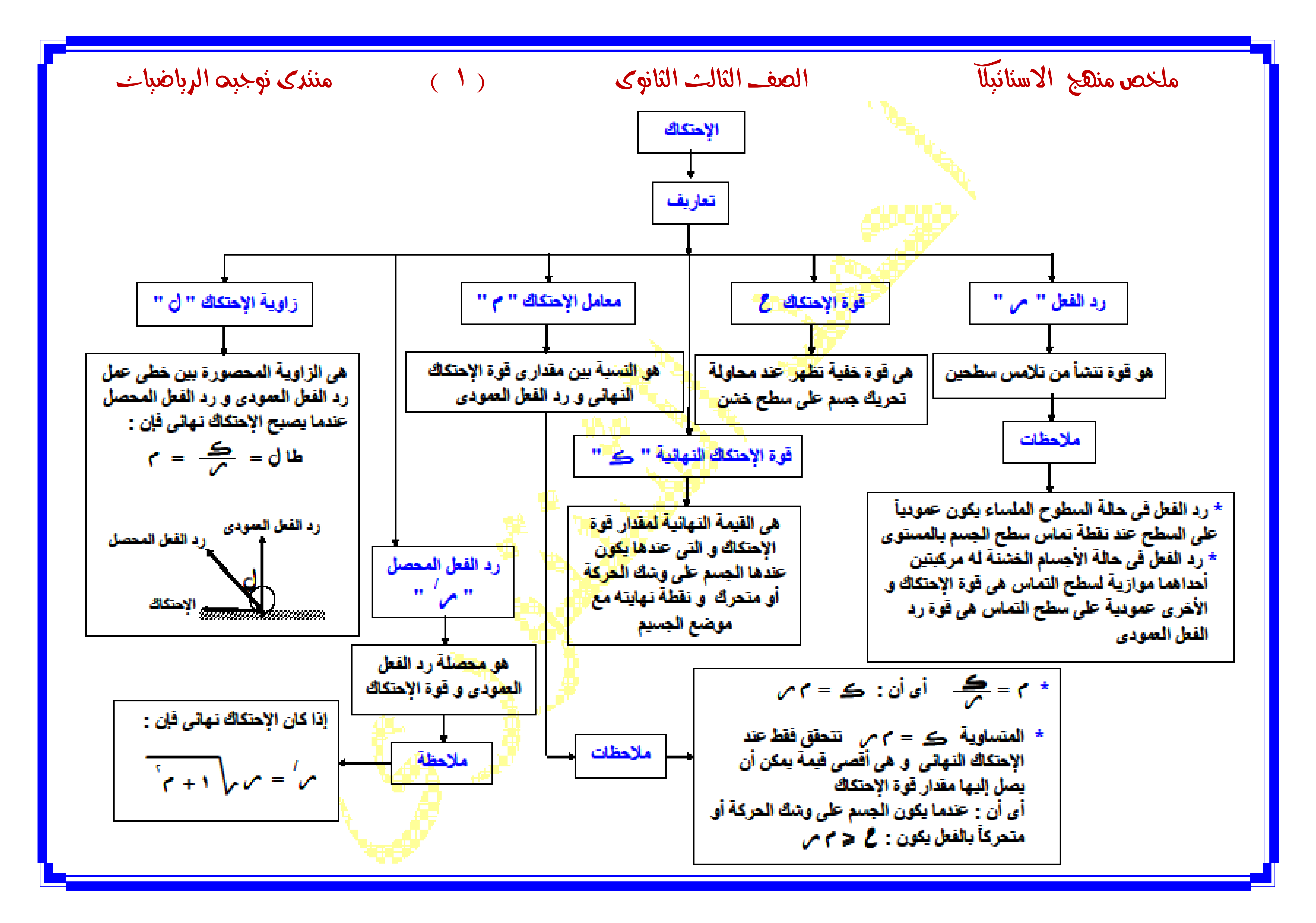
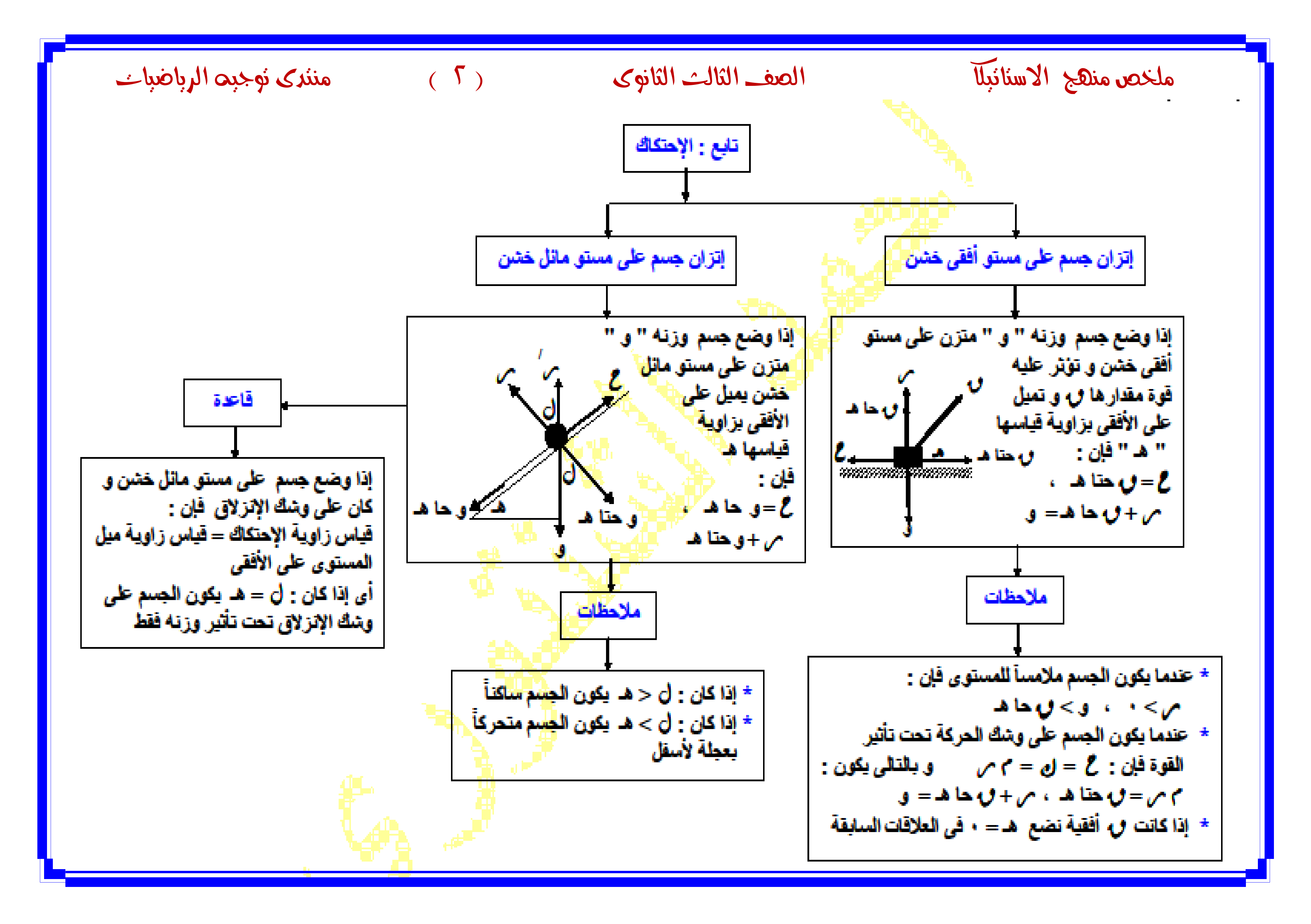
ملخص منهج

الاستاتيكا

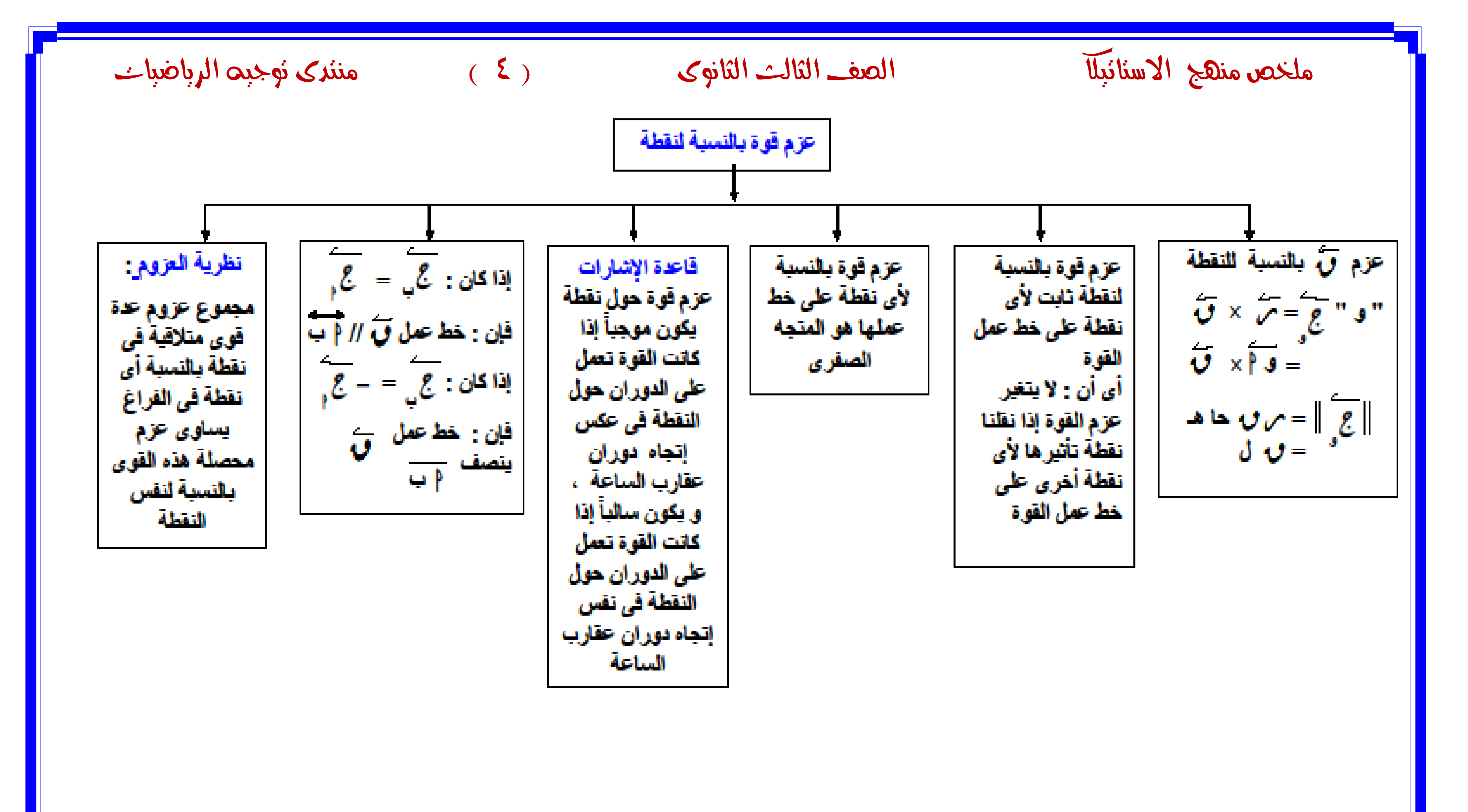
الصف الثالث الثانوى

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

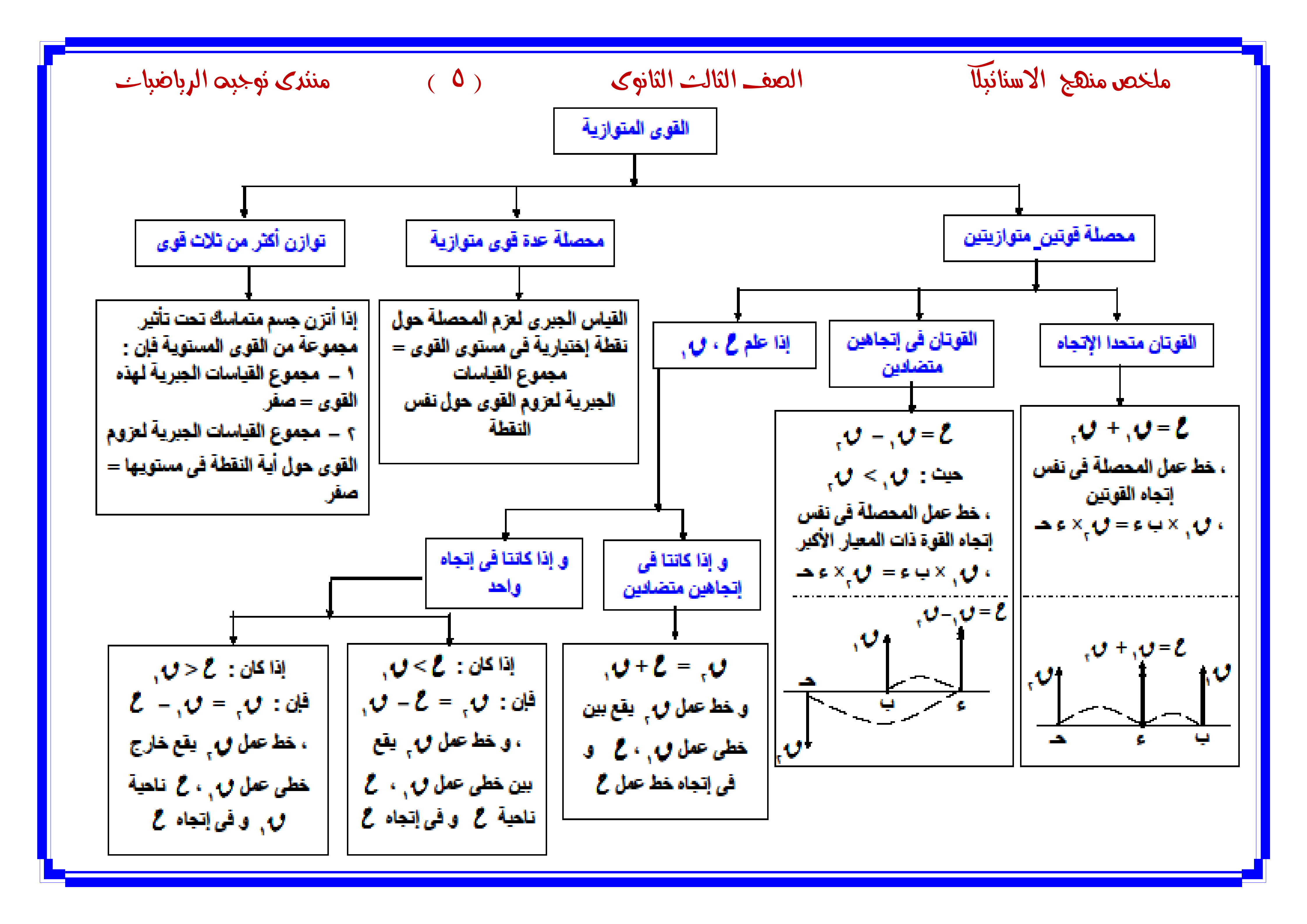

ملخص منهج الاستاتيكا
الصف الثالث الثانوى
(١)
منتدى توجيه الرياضيات
الإحتكاك
تعاريف
رد الفعل " ر "
قوة الإحتكاك ع
معامل الإحتكاك " م "
زاوية الإحتكاك " ل "
هو قوة تنشأ من تلامس سطحين
هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن
هو النسبة بين مقدارى قوة الإحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى
هى الزاوية المحصورة بين خطى عمل رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل عندما يصبح الإحتكاك نهائى فإن :
طا ل = ك / ر = م
رد الفعل العمودى
رد الفعل المحصل
ل
الإحتكاك
ملاحظات
* رد الفعل فى حالة السطوح الملساء يكون عمودياً على السطح عند نقطة تماس سطح الجسم بالمستوى
* رد الفعل فى حالة الأجسام الخشنة له مركبتين أحداهما موازية لسطح التماس هى قوة الإحتكاك و الأخرى عمودية على سطح التماس هى قوة رد الفعل العمودى
قوة الإحتكاك النهائية " ك "
هى القيمة النهائية لمقدار قوة الإحتكاك و التى عندها يكون عندها الجسم على وشك الحركة أو متحرك و نقطة نهايته مع موضع الجسيم
رد الفعل المحصل " ر' "
هو محصلة رد الفعل العمودى و قوة الإحتكاك
ملاحظة
إذا كان الإحتكاك نهائى فإن :
ر' = ر √(١ + م٢)
ملاحظات
* م = ك / ر أى أن : ك = م ر
* المتساوية ك = م ر تتحقق فقط عند الإحتكاك النهائى و هى أقصى قيمة يمكن أن يصل إليها مقدار قوة الإحتكاك
أى أن : عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحركاً بالفعل يكون : ع ≥ م ر

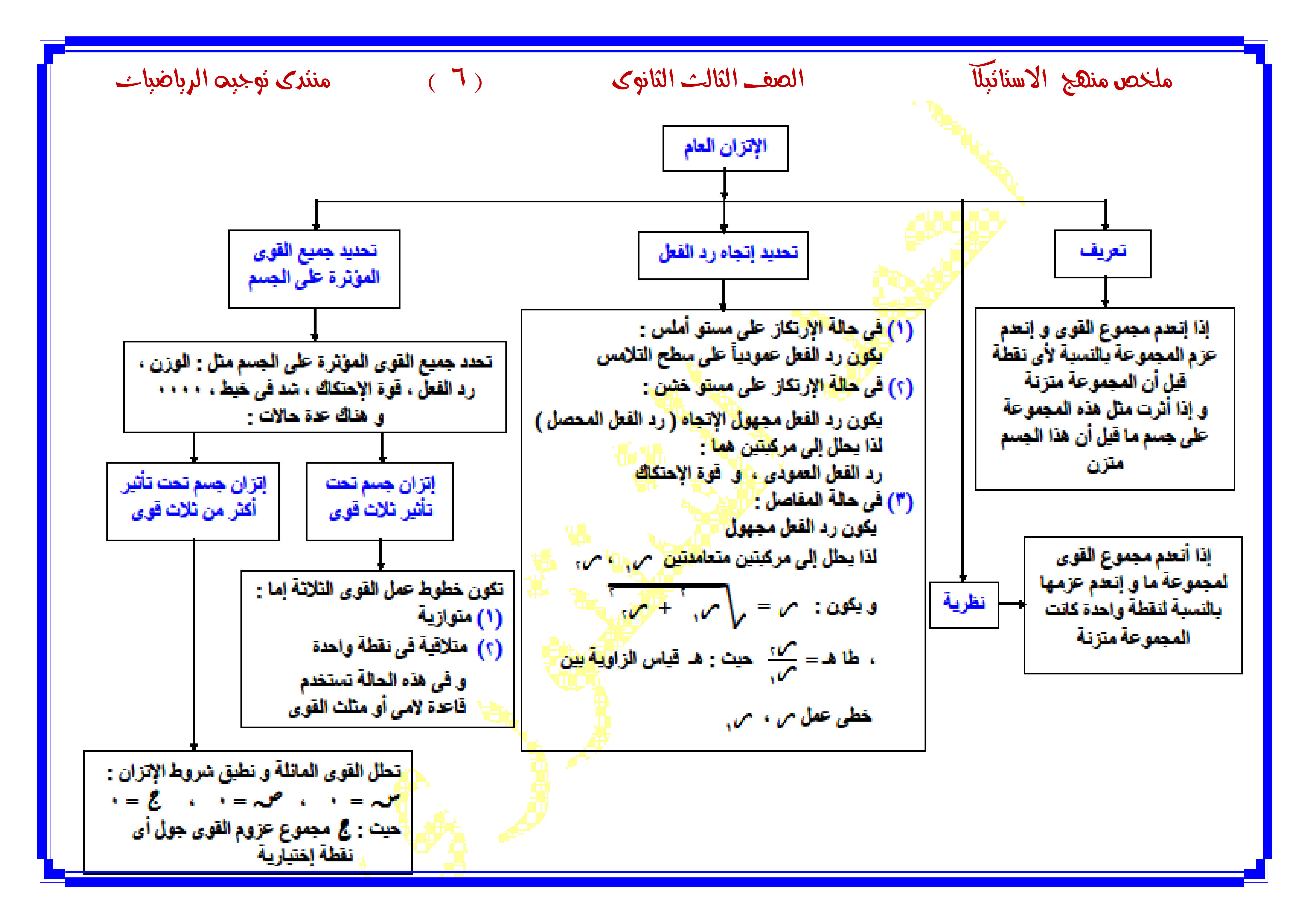

ملخص منهج الاستاتيكا
الصف الثالث الثانوى
(٢)
منتدى توجيه الرياضيات
تابع : الإحتكاك
إتزان جسم على مستو أفقى خشن
إتزان جسم على مستو مائل خشن
إذا وضع جسم وزنه " و " متزن على مستو أفقى خشن و تؤثر عليه قوة مقدارها ق و تميل على الأفقى بزاوية قياسها " هـ " فإن :
ع = ق حتا هـ ،
ر + ق حا هـ = و
ر
ق
ق حا هـ
ع
هـ
ق حتا هـ
و
إذا وضع جسم وزنه " و " متزن على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ
فإن :
ع = و حا هـ ،
ر = و حتا هـ
ر
رَ
ل
ع
ل
و حا هـ
هـ
و حتا هـ
و
قاعدة
إذا وضع جسم على مستو مائل خشن و كان على وشك الإنزلاق فإن :
قياس زاوية الإحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى
أى إذا كان : ل = هـ يكون الجسم على وشك الإنزلاق تحت تأثير وزنه فقط
ملاحظات
* إذا كان : ل > هـ يكون الجسم ساكناً
* إذا كان : ل < هـ يكون الجسم متحركاً بعجلة لأسفل
ملاحظات
* عندما يكون الجسم ملامساً للمستوى فإن :
ر > ٠ ، و > ق حا هـ
* عندما يكون الجسم على وشك الحركة تحت تأثير القوة فإن : ع = ل = م ر و بالتالى يكون :
م ر = ق حتا هـ ، ر + ق حا هـ = و
* إذا كانت ق أفقية نضع هـ = ٠ فى العلاقات السابقة

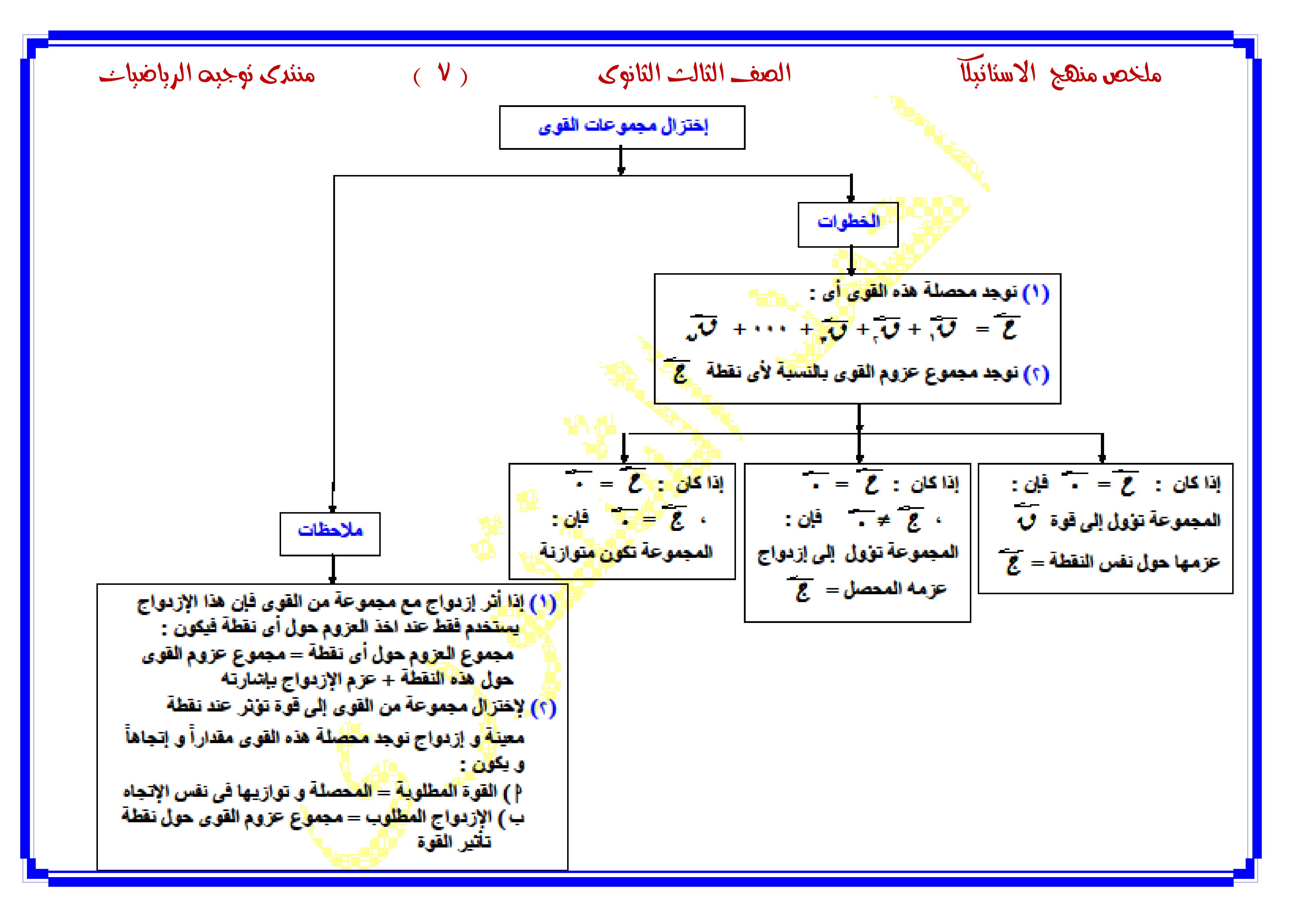
الضرب القياسي لمتجهين	الضرب الإتجاهي لمتجهين
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = \text{أ ب}$ حتا هـ حيث : $٠ \leq$ هـ $\leq ١٨٠^\circ$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ ب}$ حا هـ$)$ $\vec{\text{ى}}$ حيث : $\vec{\text{ى}}$ متجه وحدة $\perp$ مستوى $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = \text{أ}_١ \text{ب}_١ + \text{أ}_٢ \text{ب}_٢$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ}_١ \text{ب}_٢ - \text{أ}_٢ \text{ب}_١) \vec{\text{ع}}$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = ٠ \Leftrightarrow \vec{\text{أ}} \perp \vec{\text{ب}}$ أو $\vec{\text{أ}} = \vec{٠}$ أو $\vec{\text{ب}} = \vec{٠}$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \vec{٠} \Leftrightarrow \vec{\text{أ}} \parallel \vec{\text{ب}}$ أو $\vec{\text{أ}} = \vec{٠}$ أو $\vec{\text{ب}} = \vec{٠}$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = \vec{\text{ب}} \odot \vec{\text{أ}}$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = -(\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}})$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{أ}} = \text{أ}^٢$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{أ}} = \vec{٠}$
$\vec{\text{س}} \odot \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \odot \vec{\text{ص}} = ١$	$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{٠}$
$\vec{\text{س}} \odot \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ص}} \odot \vec{\text{س}} = ٠$	$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{س}} = -\vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ص}} = -\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ع}} = -\vec{\text{ص}}$
المسقط الجبرى لـ $\vec{\text{ق}}$ فى إتجاه $\vec{\text{أ}}$ = ق حتا هـ = $\frac{\vec{\text{ق}} \odot \vec{\text{أ}}}{\Vert\vec{\text{أ}}\Vert}$	متجه الوحدة فى إتجاه $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$ هو المتجه $\vec{\text{ى}} = \frac{\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}}{\text{أ ب حا هـ}}$
المركبة الجبرية لـ $\vec{\text{ق}}$ فى إتجاه $\vec{\text{أ}}$ = $\left(\frac{\vec{\text{ق}} \odot \vec{\text{أ}}}{\text{أ}^٢} \right) \vec{\text{أ}}$	المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين أ ب حا هـ = مساحة متوازى الأضلاع = ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ ضلعين متجاورين



ملخص منهج الاستاتيكا
الصف الثالث الثانوى
(٤)
منتدى توجيه الرياضيات
عزم قوة بالنسبة لنقطة
عزم $\overline{ق}$ بالنسبة للنقطة "و"
$\overline{ج}_{و} = \overline{ر} \times \overline{ق}$
$= \overline{و أ} \times \overline{ق}$
$\|\overline{ج}_{و}\| = ر ق$ حا هـ
$= ق ل$
عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لأى نقطة على خط عمل القوة
أى أن : لا يتغير عزم القوة إذا نقلنا نقطة تأثيرها لأى نقطة أخرى على خط عمل القوة
عزم قوة بالنسبة لأى نقطة على خط عملها هو المتجه الصفرى
قاعدة الإشارات
عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة
إذا كان : $\overline{ج}_{ب} = \overline{ج}_{أ}$
فإن : خط عمل $\overline{ق}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$
إذا كان : $\overline{ج}_{ب} = - \overline{ج}_{أ}$
فإن : خط عمل $\overline{ق}$ ينصف $\overline{أ ب}$
نظرية العزوم:
مجموع عزوم عدة قوى متلاقية فى نقطة بالنسبة أى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة


ملخص منهج الاستاتيكا
الصف الثالث الثانوى
(٥)
منتدى توجيه الرياضيات
القوى المتوازية
محصلة قوتين متوازيتين
محصلة عدة قوى متوازية
توازن أكثر من ثلاث قوى
القوتان متحدا الإتجاه
ح = ق١ + ق٢
، خط عمل المحصلة فى نفس إتجاه القوتين
، ق١ × ب ء = ق٢ × ء حـ
ح = ق١ + ق٢
ق١
ق٢
ب
ء
حـ
القوتان فى إتجاهين متضادين
ح = ق١ − ق٢
حيث : ق١ > ق٢
، خط عمل المحصلة فى نفس إتجاه القوة ذات المعيار الأكبر
، ق١ × ب ء = ق٢ × ء حـ
ح = ق١ − ق٢
ق١
ق٢
حـ
ب
ء
إذا علم ح ، ق١
و إذا كانتا فى إتجاهين متضادين
ق٢ = ح + ق١
و خط عمل ق٢ يقع بين خطى عمل ق١ ، ح و فى إتجاه خط عمل ح
و إذا كانتا فى إتجاه واحد
إذا كان : ح > ق١
فإن : ق٢ = ح − ق١
، و خط عمل ق٢ يقع بين خطى عمل ق١ ، ح ناحية ح و فى إتجاه ح
إذا كان : ح < ق١
فإن : ق٢ = ق١ − ح
، خط عمل ق٢ يقع خارج خطى عمل ق١ ، ح ناحية ق١ و فى إتجاه ح
القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة إختيارية فى مستوى القوى = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة
إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فإن :
١ – مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر
٢ – مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أية النقطة فى مستويها = صفر


ملخص منهج الاستاتيكا
الصف الثالث الثانوى
(٦)
منتدى توجيه الرياضيات
الإتزان العام
تعريف
إذا إنعدم مجموع القوى و إنعدم عزم المجموعة بالنسبة لأى نقطة قيل أن المجموعة متزنة و إذا أثرت مثل هذه المجموعة على جسم ما قيل أن هذا الجسم متزن
نظرية
إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما و إنعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجموعة متزنة
تحديد إتجاه رد الفعل
(١) فى حالة الإرتكاز على مستو أملس :
يكون رد الفعل عمودياً على سطح التلامس
(٢) فى حالة الإرتكاز على مستو خشن :
يكون رد الفعل مجهول الإتجاه (رد الفعل المحصل)
لذا يحلل إلى مركبتين هما :
رد الفعل العمودى ، و قوة الإحتكاك
(٣) فى حالة المفاصل :
يكون رد الفعل مجهول
لذا يحلل إلى مركبتين متعامدتين ر١ ، ر٢
و يكون : ر = √(ر١² + ر٢²)
، ظا هـ = ر٢ / ر١ حيث : هـ قياس الزاوية بين
خطى عمل ر ، ر١
تحديد جميع القوى المؤثرة على الجسم
تحدد جميع القوى المؤثرة على الجسم مثل : الوزن ، رد الفعل ، قوة الإحتكاك ، شد فى خيط ، ....
و هناك عدة حالات :
إتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى
تكون خطوط عمل القوى الثلاثة إما :
(١) متوازية
(٢) متلاقية فى نقطة واحدة
و فى هذه الحالة تستخدم قاعدة لامى أو مثلث القوى
إتزان جسم تحت تأثير أكثر من ثلاث قوى
تحلل القوى المائلة و تطبق شروط الإتزان :
ـسـ = ٠ ، ـصـ = ٠ ، ع = ٠
حيث : ع مجموع عزوم القوى حول أى نقطة إختيارية



إختزال مجموعات القوى

الخطوات

(١) نوجد محصلة هذه القوى أى :

$\overline{\text{ح}} = \overline{\text{ق}}_1 + \overline{\text{ق}}_2 + \overline{\text{ق}}_3 + \cdots + \overline{\text{ق}}_\text{ن}$

(٢) نوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة لأى نقطة $\overline{\text{ع}}$

- إذا كان : $\overline{\text{ح}} = \overline{0}$ ، $\overline{\text{ع}} = \overline{0}$ فإن : المجموعة تكون متوازنة
- إذا كان : $\overline{\text{ح}} = \overline{0}$ ، $\overline{\text{ع}} \neq \overline{0}$ فإن : المجموعة تؤول إلى إزدواج عزمه المحصل = $\overline{\text{ع}}$
- إذا كان : $\overline{\text{ح}} \neq \overline{0}$ فإن : المجموعة تؤول إلى قوة $\overline{\text{ق}}$ عزمها حول نفس النقطة = $\overline{\text{ع}}$

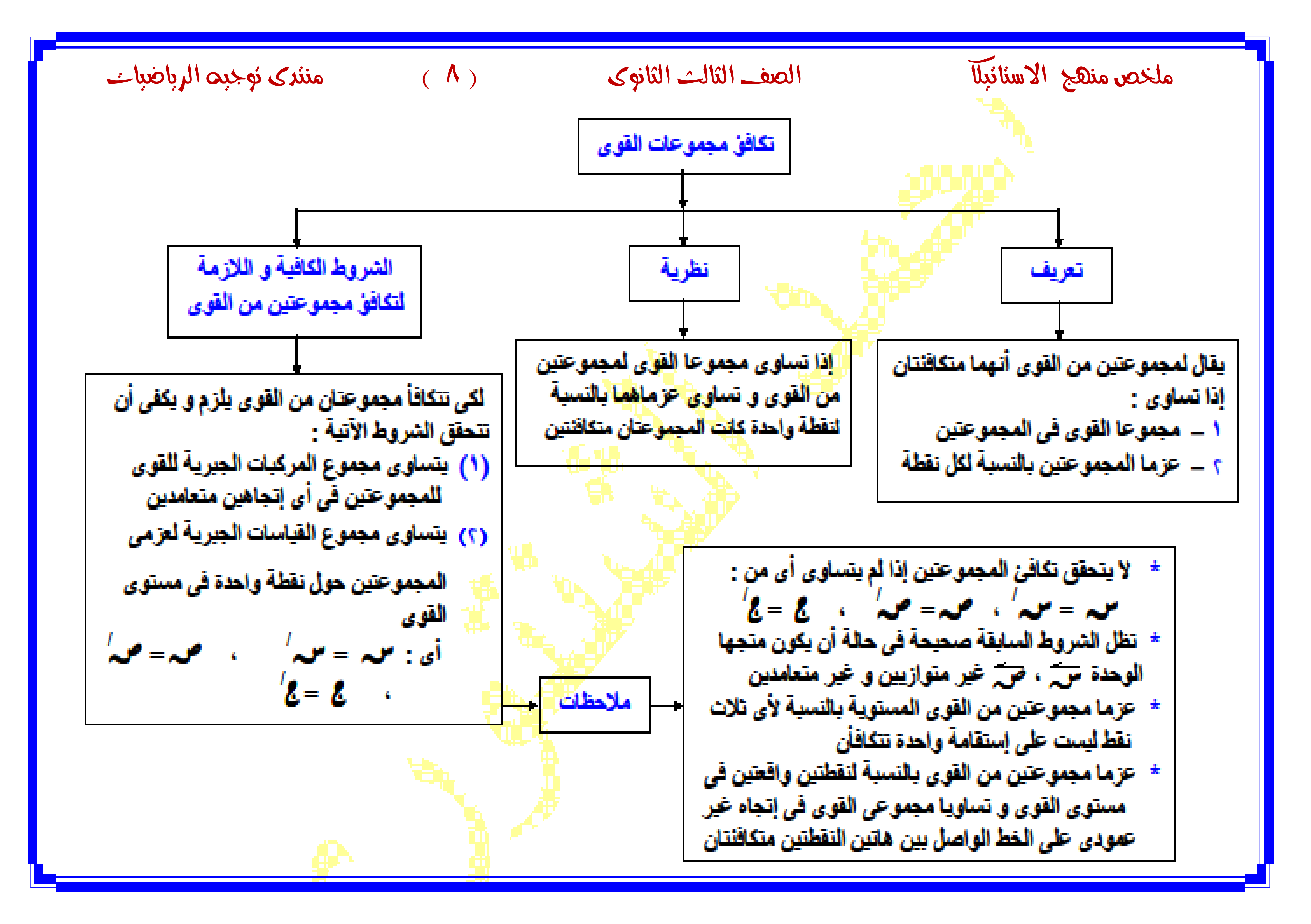
ملاحظات

(١) إذا أثر إزدواج مع مجموعة من القوى فإن هذا الإزدواج يستخدم فقط عند اخذ العزوم حول أى نقطة فيكون :
مجموع العزوم حول أى نقطة = مجموع عزوم القوى حول هذه النقطة + عزم الإزدواج بإشارته

(٢) لإختزال مجموعة من القوى إلى قوة تؤثر عند نقطة معينة و إزدواج نوجد محصلة هذه القوى مقداراً و إتجاهاً و يكون :

أ) القوة المطلوبة = المحصلة و توازيها فى نفس الإتجاه

ب) الإزدواج المطلوب = مجموع عزوم القوى حول نقطة تأثير القوة



تكافؤ مجموعات القوى

تعريف

يقال لمجموعتين من القوى أنهما متكافئتان إذا تساوى :

١ ـ مجموعا القوى فى المجموعتين

٢ ـ عزما المجموعتين بالنسبة لكل نقطة

نظرية

إذا تساوى مجموعا القوى لمجموعتين من القوى و تساوى عزماهما بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجموعتان متكافئتين

الشروط الكافية و اللازمة لتكافؤ مجموعتين من القوى

لكى تتكافأ مجموعتان من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :

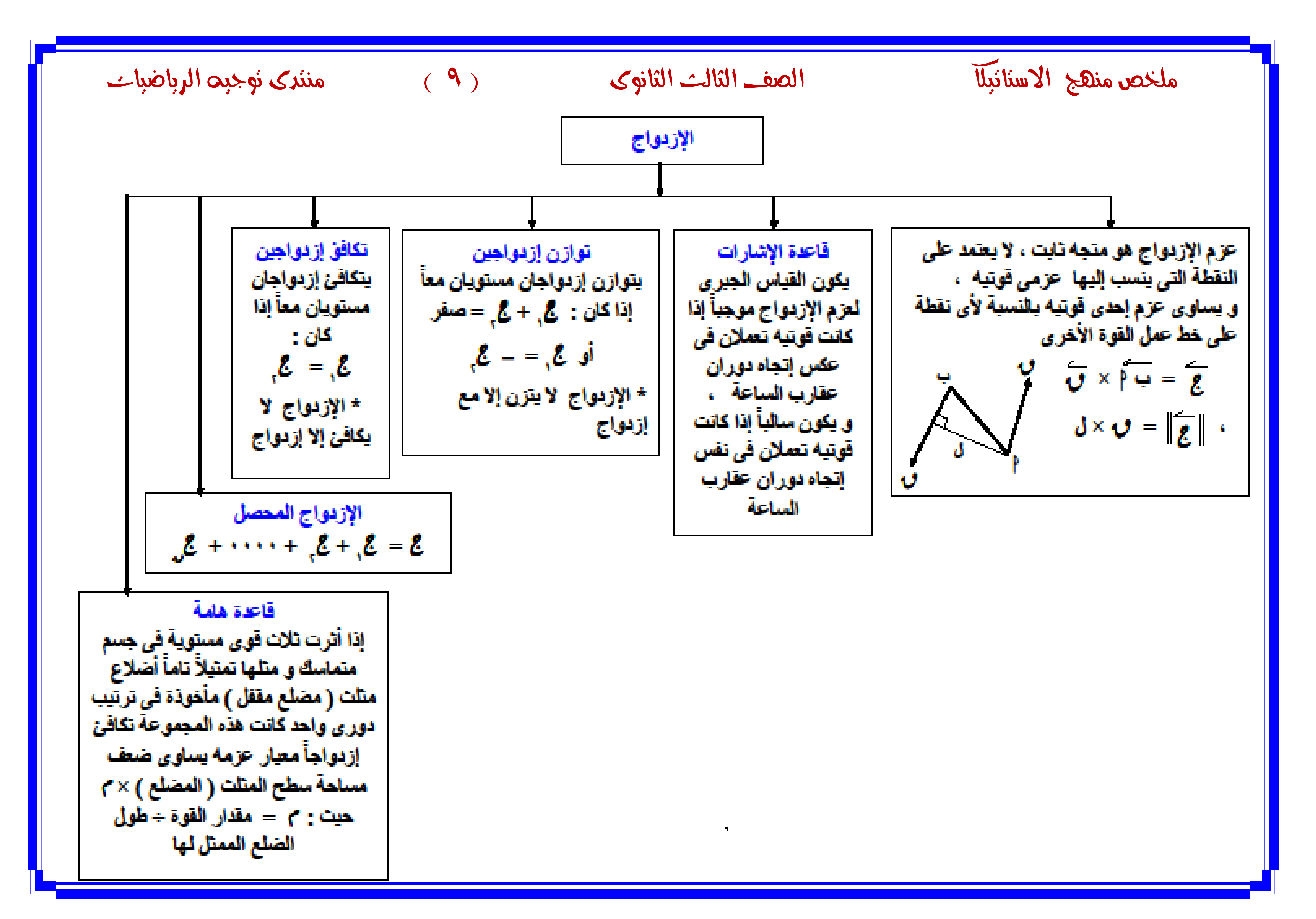
(١) يتساوى مجموع المركبات الجبرية للقوى للمجموعتين فى أى إتجاهين متعامدين

(٢) يتساوى مجموع القياسات الجبرية لعزمى المجموعتين حول نقطة واحدة فى مستوى القوى

أى : سـ = سـ′ ، صـ = صـ′ ، ع = ع′

ملاحظات

* لا يتحقق تكافؤ المجموعتين إذا لم يتساوى أى من : سـ = سـ′ ، صـ = صـ′ ، ع = ع′
* تظل الشروط السابقة صحيحة فى حالة أن يكون متجها الوحدة سـ ، صـ غير متوازيين و غير متعامدين
* عزما مجموعتين من القوى المستوية بالنسبة لأى ثلاث نقط ليست على إستقامة واحدة تتكافأن
* عزما مجموعتين من القوى بالنسبة لنقطتين واقعتين فى مستوى القوى و تساويا مجموعى القوى فى إتجاه غير عمودى على الخط الواصل بين هاتين النقطتين متكافئتان



الإزدواج
عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ، و يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى
$\overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ب أ} \times \overrightarrow{ق}$ ، $\|\overrightarrow{ج}\| = ق \times ل$
ق
ب
ل
أ
ق
قاعدة الإشارات
يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج موجباً إذا كانت قوتيه تعملان فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت قوتيه تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة
توازن إزدواجين
يتوازن إزدواجان مستويان معاً إذا كان : $ج_1 + ج_2 = صفر$
أو $ج_1 = - ج_2$
* الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج
تكافؤ إزدواجين
يتكافئ إزدواجان مستويان معاً إذا كان :
$ج_1 = ج_2$
* الإزدواج لا يكافئ إلا إزدواج
الإزدواج المحصل
$ج = ج_1 + ج_2 + ... + ج_ن$
قاعدة هامة
إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث (مضلع مقفل) مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث (المضلع) × م
حيث : م = مقدار القوة ÷ طول الضلع الممثل لها

حاصل الضرب القياسي و الاتجاهي لمتجهين

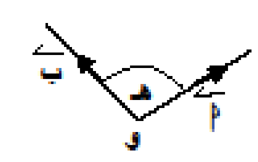
فيما يلي نعتبر : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريان ، $\text{أ} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ ، $\text{ب} = \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$

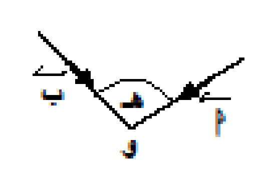
، هـ = قياس الزاوية الصغرى بين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

، $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_1\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_2\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \text{ب}_1\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_2\,\overrightarrow{\text{ص}}$

* تذكر أن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أ}_1^2 + \text{أ}_2^2}$

* الأشكال المختلفة للزاوية الصغرى بين متجهين :


المتجهان لهما نفس نقطة البداية


المتجهان لهما نفس نقطة النهاية


نقطة بداية أحد المتجهين هي نقطة نهاية الآخر

حيث : $٠ \leq$ هـ ≤ ١٨٠ ، قياس الزاوية الكبرى بين متجهين = ٣٦٠ − هـ

* المجموعة اليمينية المتعامدة : هي ثلاث متجهات $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{ع}}$ وحدة متعامدة مثنى مثنى



حاصل الضرب القياسي لمتجهين

(١) $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}\,\text{ب}$ حتا هـ   " و منه : حتا هـ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{أ}\,\text{ب}}$ "

(٢) $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_1\text{ب}_1 + \text{أ}_2\text{ب}_2$

* القيم المختلفة لحاصل الضرب القياسي لمتجهين :
* موجب إذا كانت (هـ) حادة
* سالب إذا كانت (هـ) منفرجة
* يساوى صفر إذا كانت (هـ) قائمة

" في هذه الحالة : إما أحد المتجهين أو كلاهما متجه صفرى ، و إما أنهما متعامدان "

* أما إذا كان ق(∠ هـ) = ٠° فإنهما يكونان متوازيان و لهما نفس الإتجاه

و إذا كان ق(∠ هـ) = ١٨٠° فإنهما يكونان متوازيان و متضادتان فى الإتجاه

، و يكون : $\dfrac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \dfrac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} =$ ك " عدد ثابت "

* $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{٠} = \overrightarrow{٠} \odot \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{٠} \odot \overrightarrow{٠} =$ صفر
* $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \odot \overrightarrow{\text{أ}}$ " إبدالى "
* $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}^2$
* $\overrightarrow{\text{س}} \odot \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \odot \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{ع}} = ١$
* $\overrightarrow{\text{س}} \odot \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \odot \overrightarrow{\text{ع}} =$ صفر

* المسقط الجبرى (المركبة الجبرية) :

مسقط $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = أ حتا هـ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}}$

، مسقط $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه عمودى على $\overrightarrow{\text{ب}}$ = أ حا هـ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{حـ}}}{\text{حـ}}$

* متجه الوحدة :

متجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{أ}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\text{أ}}$

* المركبة الإتجاهية :

المركبة الإتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = المسقط الجبرى

للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ منسوب لمتجه الوحدة فى إتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\left(\dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$

المركبة الإتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى إتجاه عمودى على $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\overrightarrow{\text{أ}} - \left(\dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$

لأن : $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}$ " من الشكل المقابل "

حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين

(١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ\ ب\ جا\ هـ)\ \overrightarrow{ى}$

" و منه : $جا\ هـ = \frac{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}{أ\ ب}$ ، $\overrightarrow{ى} = \frac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{أ\ ب\ جا\ هـ}$ "

حيث : $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يجمعهما

(٢) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_1 ب_2 - أ_2 ب_1)\ \overrightarrow{ع}$

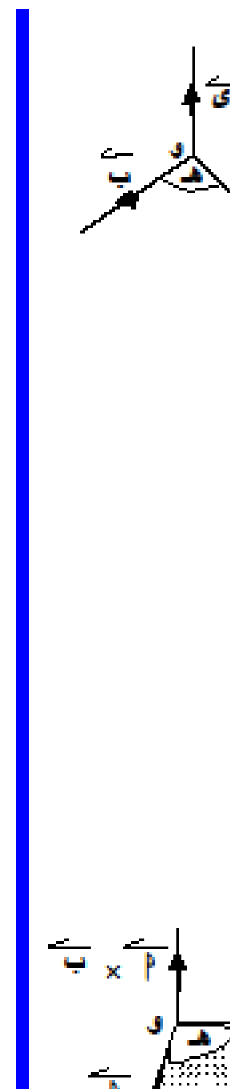
* القيم المختلفة لحاصل الضرب القياسي لمتجهين :
* إذا كانت (هـ) قائمة فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ\ ب)\ \overrightarrow{ى}$
* إذا كان : ق(∠ هـ) = ٠° أو ق(∠ هـ) = ١٨٠°

فإن : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{0}$ ، و يكونان متوازيان

* $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
* $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -(\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$ " غير إبدالى "
* $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{0}$
* $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{0}$
* $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$
* $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$
* $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$
* المعنى الهندسي لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين : من الشكل المقابل :

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|$ = مساحة ▱ و أ ب حـ

= ٢ مساحة Δ و أ ب



العزوم

عزوم قوة بالنسبة لنقطة " كمية متجهة تحدد مقدرة قوة على إحداث دوران "

تذكر : القوة متجه لذا إذا كان : $\overrightarrow{ق} = (ل ، م) = ل\ \overrightarrow{س} + م\ \overrightarrow{ص}$

فإن : ميل خط عملها = $\frac{م}{ل}$ ، $ق = \|\overrightarrow{ق}\| = \sqrt{ل^2 + م^2}$

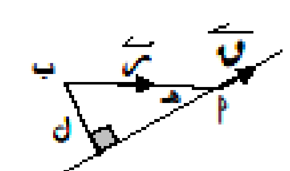
* عزم قوة بالنسبة لنقطة :

إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تؤثر عند أ " لا يتوقف على موضعها "

فإن : متجه عزمها بالنسبة لنقطة ب

هو : $\overrightarrow{ع}_ب = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}$

حيث : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ب أ} = \overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}$ = (نقطة التأثير) − (مركز العزم)



* القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة :

$ع_ب = ل\ ق$ " حيث : $ل = ر\ جا\ هـ = \frac{ع}{ق}$

و يسمى ل ذراع القوة ، و هو طول العمود النازل من مركز العزم على خط عمل القوة "

* قاعدة الإشارة لعزم قوة حول نقطة :

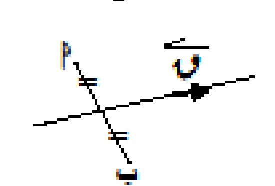
عزم قوة حول نقطة يكون موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون صفراً إذا كان خط عمل القوة يمر بنفس النقطة

* ملاحظات و نتائج :
* ينعدم عزم قوة بالنسبة لنقطة تقع على خط عملها $\overrightarrow{ع}_ب = \overrightarrow{0}$ " $ع_ب$ = صفر "
* إذا كان : $\overrightarrow{ع}_أ = \overrightarrow{ع}_ب$ أو $ع_أ = ع_ب$

فإن : $\overrightarrow{ق} \parallel \overleftrightarrow{أ ب}$

* إذا كان : $\overrightarrow{ع}_أ = -\overrightarrow{ع}_ب$ أو $ع_أ = -ع_ب$

فإن : $\overrightarrow{ق}$ تنصف $\overline{أ ب}$



عزوم القوى المستوية

نظرية : مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

(١) إذا كانت : القوى كلها تؤثر فى نقطة واحدة :

ح (المحصلة) = ق١ + ق٢ + ...

١) عزم المحصلة : ع ب = ر × ح

٢) عزم المحصلة = مجموع عزوم هذه القوى

ع ب = ر × ق١ + ر × ق٢ + ...

(٢) إذا كانت كل قوة لها نقطة تأثير خاصة بها :

فإن : عزم المحصلة = مجموع عزوم هذه القوى

ع ب = ر١ × ق١ + ر٢ × ق٢ + ...

* ملاحظات :

* إذا كان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة = صفر
فإن خط عمل المحصلة يمر بهذه النقطة

* إذا كان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (أ)
= مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (ب)
فإن المحصلة توازى أ ب

* إذا كان مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (أ)
= ـ مجموع عزوم عدة قوى حول نقطة (ب)
فإن المحصلة تنصف أ ب

* بعض خواص و علاقات الأشكال الهندسية :

* فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية :
أ ب = أ حـ جا هـ ، ب حـ = أ حـ جتا هـ

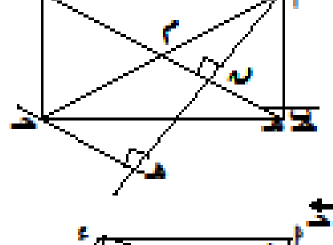
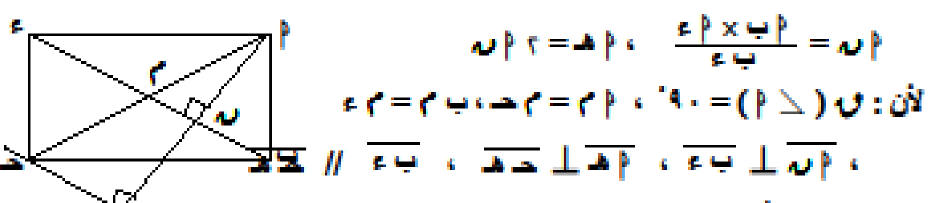
* فى Δ أ ب حـ المتساوى الساقين : " أ ب = أ حـ "
أ ء = أ ب جا هـ ، ب حـ = ٢ × أ ب جتا هـ

ملاحظة :

إذا كان : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع فإن : أ ء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × أ ب

* طول قطر المربع = طول ضلعه × $\sqrt{2}$

* فى المستطيل أ ب حـ ء :

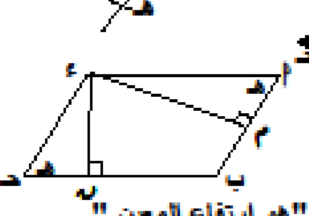
أ ن = $\frac{\text{أ ب} \times \text{أ ء}}{\text{ب ء}}$ ، أ هـ = ٢ أ ن

لأن : ق (∠ أ) = ٩٠° ، أ م = م حـ ، ب م = م ء



، أ ن ⊥ ب ء ، أ هـ ⊥ حـ هـ ، ب ء // حـ هـ

* فى متوازى الأضلاع أ ب حـ ء :



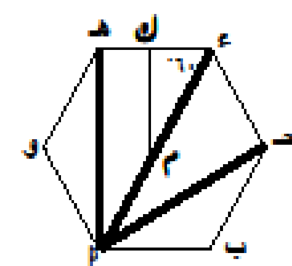
ء ن = ء حـ جا هـ ، و هو البعد العمودى بين أ ء ، ب حـ
سواء رسم داخل متوازى الأضلاع أو خارجه
ء م = ء أ جا هـ " كسابقه " بين أ ب ، ء حـ

ملاحظة :

إذا كان : أ ب حـ ء معين فإن : ء ن = ء م = ء حـ جا هـ "هو إرتفاع المعين "

* فى السداسى المنتظم أ ب حـ ء هـ و :

إذا كان : طول ضلعه = ل
فإن : أ ء = ب هـ = حـ و = ٢ ل
، أ حـ = أ هـ = ب ء = ب و = حـ هـ = ء و = $\sqrt{3}$ ل
= حـ هـ = ء و = $\sqrt{3}$ ل
، م ك = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل " م مركز السداسى المنتظم "
= بعد أى ضلع من أضلاعه عن المركز



القوى المتوازية

محصلة قوتين متوازيتين

* القوتان تعملان في إتجاه واحد
* المقدار : $ع = ق_1 + ق_2$
* الإتجاه : توازى القوتين و تعمل فى إتجاههما
* نقطة التأثير : هى ء ∈ $\overline{ب حـ}$ و أقرب إلى القوة الأكبر " بفرض أن : $ق_1 > ق_2$ "

بحيث : $ق_1 \times حـ ء = ق_2 \times ء ب$

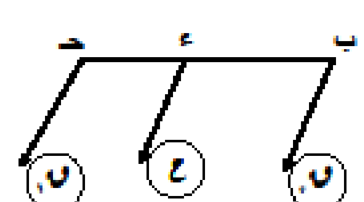
* القوتان تعملان فى إتجاهين متضادتين
* المقدار : $ع = |ق_1 - ق_2|$

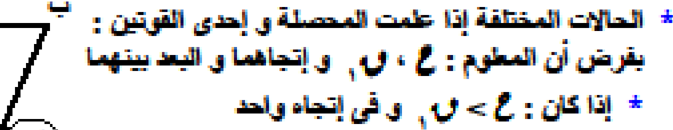
" القوة الكبرى ــ القوة الصغرى "

* الإتجاه : توازى القوتين و تعمل فى إتجاهها
* نقطة التأثير : هى ء ∈ $\overline{ب حـ}$

من جهة القوة الأكبر " بفرض أن : $ق_1 > ق_2$ "

بحيث : $ق_1 \times حـ ء = ق_2 \times ء ب$





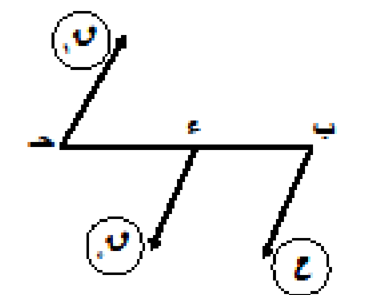
* الحالات المختلفة إذا علمت المحصلة و إحدى القوتين :

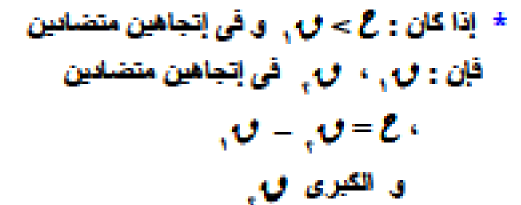
بفرض أن المعلوم : ع ، $ق_1$ و إتجاهها و البعد بينهما

* إذا كان : $ع > ق_1$ و فى إتجاه واحد

فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاه واحد

، $ع = ق_1 + ق_2$ و تكون قريبة من الكبرى



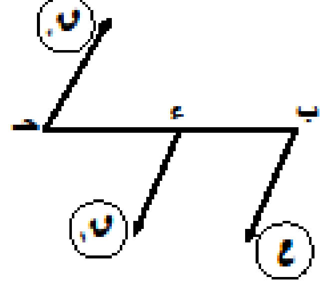


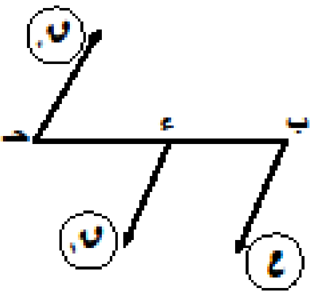
* إذا كان : $ع < ق_1$ و فى إتجاهين متضادين

فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاهين متضادين

، $ع = ق_1 - ق_2$

و الكبرى $ق_1$



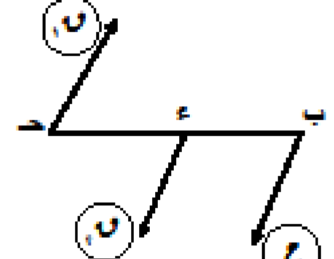


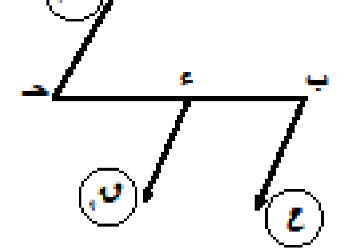
* إذا كان : $ع < ق_1$ و فى إتجاه واحد

فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاهين متضادين

، $ع = ق_2 - ق_1$

و الكبرى $ق_2$





* إذا كان : $ع < ق_1$ و فى إتجاهين متضادين

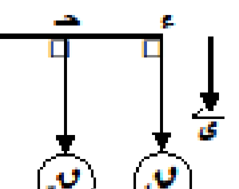
فإن : $ق_1$ ، $ق_2$ فى إتجاهين متضادين

، $ع = ق_1 - ق_2$

و الكبرى $ق_1$

محصلة مجموعة من القوى المتوازية تعمل فى إتجاه واحد

$\overline{ع} = (ق_1 + ق_2 + \cdots)\, \overline{ى}$



* المقدار :

$ع = ق_1 + ق_2 + \cdots$

* الإتجاه :

يوازى المجموعة و يعمل فى إتجاهها

* نقطة التأثير :



تتعين بأخذ العزوم حول أى نقطة (يستحسن عند احد الأطراف ﺃ أو ء مثلاً)

كما يلى :

مجموع عزوم القوى حول (ء مثلاً) = عزم المحصلة حول (ء)

و منه توجد بعد نقطة تأثير المحصلة عن (ء)

محصلة مجموعة من القوى المتوازية تعمل فى إتجاهات متضادة

$$\overrightarrow{\text{ح}} = (\text{ق}_1 - \text{ق}_2 - \text{ق}_3 + \text{ق}_4 + \cdots)\,\overrightarrow{\text{ى}}$$

* المقدار :

$$\text{ح} = |\,\text{ق}_1 - \text{ق}_2 - \text{ق}_3 + \text{ق}_4 + \cdots\,|$$

* الإتجاه :

يوازى المجموعة و يتحدد حسب معامل $\overrightarrow{\text{ى}}$ " إذا كان موجب فى نفس إتجاه $\overrightarrow{\text{ى}}$ ، إذا كان سالب فى إتجاه مضاد له "

* نقطة التأثير :

تتعين بأخذ العزوم حول أى نقطة كم سبق

توازن القوى المتوازية

الشروط :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

" تنعدم المحصلة أى : $\text{ح} = 0$ "

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفر

" ينعدم العزوم حول أى نقطة أى : $\text{ع} = 0$ "

* ملاحظات :

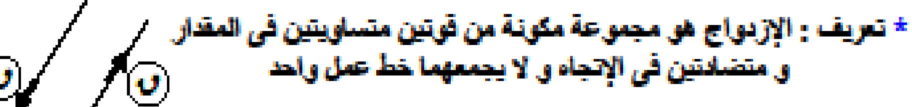
* فى الشكل المقابل : $\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم " وزنه يؤثر فى منتصفه " يرتكز على حاملين عند حـ ، ء

(١) $\text{ر}_1 - \text{ر}_2 = \text{و}$

(٢) العزوم حول أى نقطة = صفر

* إذا كان القضيب غير منتظم فغن وزنه لا يؤثر عند منتصفه
* الضغط على الحامل = رد الفعل
* إذا علق من (أ مثلاً) ثقل (ك) و أصبح القضيب على وشك الدوران حول (حـ) ينعدم الضغط " و رد الفعل " عند الحامل (ء)

الإزدواجات

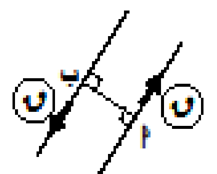


* تعريف : الإزدواج هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد
* نظرية : عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ، و هو يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى
* متجه عزم الإزدواج : إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ تؤثر فى أ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ تؤثر فى ب فإن :

$$\overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{بأ}} \times \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ق}_2}$$

* محصلة قوتى الإزدواج = صفر " أى أن : $\overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2} = \overrightarrow{0}$ "

بينما : $\text{ق}_1 = \text{ق}_2$



* معيار عزم الإزدواج = مقدار إحدى قوتيه × البعد العمودى بينهما

$$\text{ع} = \text{ق} \times \text{ل}$$

= معيار عزم إحدى قوتيه بالنسبة لنقطة تقع على خط عمل القوة الأخرى

= مجموع معيارى عزمى إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة فى المستوى

* إشارة القياس الجبرى لعزم الإزدواج :

يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج موجباً إذا كانت قوتيه تعملان فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة ، و يكون سالباً إذا كانت قوتيه تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة

* توازن إزدواجين :

مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى " $\overrightarrow{\text{ع}_1} + \overrightarrow{\text{ع}_2} = \overrightarrow{0}$ "

أى : مجموع عزميهما = صفر " عزماهما متساويان فى المعيار و متضادتان فى الإتجاه "

" $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 = \text{صفر}$ أو $\text{ع}_1 = -\,\text{ع}_2$ "

* تكافؤ إزدواجين :

يتساوى متجهي عزميهما " $\overrightarrow{ج_1} = \overrightarrow{ج_2}$ "

أي : مجموع عزميهما = صفر " عزماهما متساويان في المعيار و متحدان في الإتجاه "

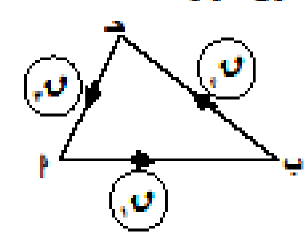
" $ج_1 = ج_2$ "

* الإزدواج المحصل :

مجموع عدة إزدواجات مستوية تكافئ إزدواجاً عزمه = مجموع عزوم تلك الإزدواجات

$$ج = ج_1 + ج_2 + ج_3 + \cdots\cdots + ج_ن$$

ملاحظة : إذا كان : $ج$ = صفر فإن : مجموعة الإزدواجات تكون متوازنة



* نظرية : في الشكل المقابل
  * القوى في إتجاه دوري واحد
  * القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع Δ أ ب حـ

  أي : $\frac{ق_1}{أ\,ب} = \frac{ق_2}{ب\,حـ} = \frac{ق_3}{حـ\,أ} = ل$ " ثابت "
  * المجموعة تكافئ إزدواجاً

  معيار عزمه = ٢ × ل × مساحة Δ أ ب حـ

ملاحظة : النظرية صحيحة لأي مضلع مقفل

* نتائج هامة :
  * الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج
  * إذا أتزن جسم تحت تأثير إزدواج و قوتين فإن القوتين تكونان إزدواجاً
  * الطرق المختلفة لإثبات أن مجموعة من القوى تكافئ إزدواجاً :
    * كل قوتين منهما تكون إزدواجاً (إزدواج محصل)
    * القوى تؤثر في أضلاع مضلع مقفل و في إتجاه دوري واحد و مقاديرها متناسبة مع أطوال أضلاع المضلع
    * تحليل القوى في إتجاهين متعامدين